

TEORIA GENERALE DEI SISTEMI DECISIONALI CON INFORMAZIONE COMPRESSA E ETEROGENEITÀ STRUTTURALE

**Fondazione matematica del limite di completezza dei
decisori aggregativi (media-based), dominanza
informativa e non-commutatività tra
ottimizzazione e aggregazione.**

Autore: Pierernesto Di Paolo

Anno: 2026

**Stato: Opera fondazionale chiusa (versione
congelata)**

DICHIARAZIONE SOLENNE DI STATUTO

1. Questa opera è fondazionale e autonoma.
2. Non dipende da casi empirici.
3. Ogni applicazione (clinica, ingegneristica, economica, sociale) è opera derivata separata e non modifica il nucleo teorico.
4. La validazione empirica (se eseguita altrove) può solo riconoscere o confutare ipotesi applicative, non “fondare” questa opera.

NOTE LEGALI — RISERVA INTERNAZIONALE ESTESA

Titolare esclusivo: Pierernesto Di Paolo.

Sono vietati senza autorizzazione scritta dell'Autore:

- riproduzione totale o parziale;
- distribuzione, pubblicazione editoriale o accademica non autorizzata;
- traduzione;
- adattamento, riformulazione, compendio, riduzione o “riscrittura”;
- creazione di opere derivate;
- implementazione algoritmica o software basata su questa opera;
- uso in policy, linee guida, sistemi decisionali automatizzati, materiale didattico;
- qualunque sfruttamento commerciale diretto o indiretto;
- deposito brevettuale o registrazione di diritti derivati.

La pubblicazione in archivi digitali pubblici (se effettuata dall'Autore) non costituisce concessione di licenza implicita.

Riserva internazionale estesa: Convenzione di Berna / TRIPS / WIPO Copyright Treaty e normativa UE/nazionale applicabile.

RUOLO DI STRUMENTI TECNICI

Eventuali strumenti di supporto (editoriali, di calcolo, di verifica) sono meri ausili tecnici.

Non acquisiscono co-autorialità, diritti o licenze.

La paternità scientifica e giuridica è esclusiva dell'Autore.

ABSTRACT

Si formalizza un sistema decisionale con stato latente Z (aleatorio non degenere), spazio decisionale U e funzione obiettivo $F(z,u)$. Si definiscono:

1. l'ottimo individuale $u^*(z) = \operatorname{argmax}_u F(z,u)$;
2. l'ottimo aggregato $u_{\text{pop}} = \operatorname{argmax}_u E[F(Z,u)]$. Si dimostra che la completezza dell'operatore aggregativo equivale alla costanza quasi ovunque dell' argmax individuale (e, sotto regolarità differenziale, alla separabilità strutturale). Si deriva la sensibilità di $u^*(z)$ via Teorema delle Funzioni Implicite, si esprime il regret come divergenza (quadratica e, sotto convessità, come divergenza di Bregman), e si collega la superiorità dei decisori condizionati all'informazione all'ordine di Blackwell sui confronti tra esperimenti statistici.

SEZIONE 0 — NOTAZIONE E OGGETTI

0.1 Spazio probabilistico e stato

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità.

Sia $Z: \Omega \rightarrow \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^k$ variabile aleatoria.

Assunzione 0.1 (Eterogeneità non degenera)

$\text{Var}(Z) > 0$ (cioè Z non è quasi certamente costante).

0.2 Spazio decisionale

Sia $U \subset \mathbb{R}^p$ insieme non vuoto e compatto (oppure, localmente, aperto con vincoli proiettati su compatto).

0.3 Funzione obiettivo (utilità)

Sia $F: \mathcal{Z} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, misurabile in z e continua in u .

Per risultati differenziali: $F \in C^2$ (o C^3) in u , localmente.

0.4 Operatore argmax

$\text{Argmax}_{\{u \in U\}} g(u) = \{u \in U: g(u) \geq g(v) \forall v \in U\}$.

Se unico, lo indichiamo con $u = \text{argmax } g$.

0.5 Ottimo individuale e aggregato

Definizione 0.2 (Ottimo individuale)

$u^*(z) \in \text{Argmax}_{\{u \in U\}} F(z, u)$.

Definizione 0.3 (Ottimo aggregato)

$u_{\text{pop}} \in \text{Argmax}_{\{u \in U\}} E[F(Z, u)]$.

0.6 Regret

Definizione 0.4 (Regret individuale rispetto a decisione u)

$$\text{Reg}(z;u) = F(z,u^*(z)) - F(z,u) \geq 0.$$

SEZIONE I — DUE OPERATORI DECISIONALI

I.1 Operatore individuale (condizionato)

B: $z \mapsto u^*(z)$.

I.2 Operatore aggregato (media-based)

A: $P_Z \mapsto u_{\text{pop}}$, dove u_{pop} massimizza la media rispetto a P_Z .

I.3 Tesi fondazionale (forma operativa)

In presenza di eterogeneità reale e interazione non separabile tra stato e decisione, A non può coincidere quasi ovunque con B.

SEZIONE II — TEOREMA DI COMPLETEZZA (NECESSITÀ E SUFFICIENZA)

Assunzione II.0 (Unicità quasi ovunque dell'ottimo individuale)

Per P-quasi ogni z , l'argmax individuale è unico.

Definizione II.1 (Completezza aggregativa)

A è completo se esiste $u_0 \in U$ tale che:

- $u_0 \in \text{Argmax}_u E[F(Z,u)]$, e
- $u_0 = u^*(z)$ per P-quasi ogni z .

Teorema II.1 (Completezza $\Leftrightarrow$ costanza dell'argmax)

Sotto II.0:

A è completo $\Leftrightarrow$ esiste u_0 tale che $u^*(z)=u_0$ P-q.o.

Prova.

($\Rightarrow$) Per completezza esiste u_0 ottimo individuale q.o. Per unicità q.o., $u^*(z)=u_0$ q.o.

($\Leftarrow$) Se $u^*(z)=u_0$ q.o., allora $F(z,u_0) \geq F(z,u)$ q.o. $\forall u$; prendendo $E[\cdot]$, $E[F(Z,u_0)] \geq E[F(Z,u)]$ $\forall u$. Dunque u_0 è ottimo aggregato.

Q.E.D.

Corollario II.2 (Criterio pratico di non-completezza)

Se esistono z_1, z_2 con $P(z \in N_1) > 0$ e $P(z \in N_2) > 0$ tali che $u^*(z_1) \neq u^*(z_2)$, allora A non è completo.

SEZIONE III — NON-COMMUTATIVITÀ ARGMAX / EXPECTATION

Definizione III.1

Sia $g(u) = E[F(Z,u)]$.

Osservazione III.2

u_{pop} massimizza g ; ma $u^*(z)$ massimizza $F(z,\cdot)$ punto per punto.

Quindi l'uguaglianza $u_{\text{pop}} = u^*(z)$ q.o. richiede che il massimizzante sia sostanzialmente indipendente da z (Teorema II.1).

Teorema III.3 (Non-commutatività generale)

Se $u^*(z)$ non è costante q.o., allora $P(u_{\text{pop}} = u^*(Z)) < 1$.

Prova.

Se $P(u_{\text{pop}} = u^*(Z)) = 1$ allora $u^*(z) = u_{\text{pop}}$ q.o., quindi costante q.o. Contraddizione.

Q.E.D.

SEZIONE IV — STRUTTURA DIFFERENZIALE DELL'ARGMAX (IFT) E SENSIBILITÀ

Assunzione IV.1 (Regolarità)

Z e U aperti (localmente), $F \in C^2$ in (z,u) .

Definizione IV.2

$$G(z,u) = \nabla_u F(z,u).$$

Condizione di ottimo (FOC)

$$G(z, u^*(z)) = 0. \quad (IV.1)$$

Assunzione IV.3 (Non degenerazione del secondo ordine)

$H(z) = \nabla^2_{uu} F(z, u^*(z))$ è invertibile.

Teorema IV.4 (Formula della sensibilità)

Esiste $u^*(z)$ differenziabile e:

$$D_z u^*(z) = - H(z)^{-1} \nabla_{zu} F(z, u^*(z)). \quad (IV.2)$$

Prova completa in Appendice A tramite Teorema delle Funzioni Implicite.

Corollario IV.5 (Separabilità $\Rightarrow$ sensibilità nulla)

Se $F(z,u)=a(z)+b(u)$, allora $\nabla_{zu} F=0$ e $D_z u^*(z)=0$; dunque $u^*(z)$ è costante.

Corollario IV.6 (Sensibilità non nulla $\Rightarrow$ non-completezza)

Se $D_z u^*(z) \neq 0$ su un insieme di probabilità positiva, allora $u^*(z)$ non è costante q.o. e A non è completo.

SEZIONE V — REGRET: BOUNDS, ESPANSIONI, BREGMAN

V.1 Taylor fino al 3° ordine (in u)

Sia $\Delta u = u - u^*(z)$. Con $F \in C^3$:

$$F(z, u) = F(z, u^*) + (1/2) \Delta u^T H(z) \Delta u + (1/6) T(z)[\Delta u, \Delta u, \Delta u] + O(\|\Delta u\|^4)$$

dove $H(z) = \nabla^2_{uu} F(z, u^*(z))$, $T(z) = \nabla^3_{uuu} F(z, u^*(z))$.

Poiché $\nabla_u F(z, u^*) = 0$, il termine lineare è nullo.

V.2 Regret

$$\begin{aligned} \text{Reg}(z; u) &= F(z, u^*) - F(z, u) \\ &= -(1/2) \Delta u^T H(z) \Delta u - (1/6) T(z)[\Delta u, \Delta u, \Delta u] + O(\|\Delta u\|^4). \end{aligned} \quad (V.1)$$

V.3 Bounds uniformi (curvatura)

Se $-H(z)$ è compresa tra mI e MI ($m > 0$) nel dominio locale:

$$(m/2) \|\Delta u\|^2 \leq \text{Reg}(z; u) \leq (M/2) \|\Delta u\|^2 \quad (\text{per } \Delta u \text{ piccolo}). \quad (V.2)$$

V.4 Regret come divergenza di Bregman (loss convessa)

Poni $L(z, u) = -F(z, u)$. Se L è fortemente convessa in u , definisci:

$$D_L(u \parallel v) = L(z, u) - L(z, v) - \langle \nabla_u L(z, v), u - v \rangle$$

con $v = u^*(z)$ e $\nabla_u L(z, u^*(z)) = 0$, ottieni:

$$\text{Reg}(z; u) = D_L(u \parallel u^*(z)). \quad (V.3)$$

Questa è la connessione strutturale con la divergenza di Bregman.

SEZIONE VI — DOMINANZA INFORMATIVA (BLACKWELL)

VI.1 Esperimenti

Un esperimento E è un canale $P(X|Z)$.

VI.2 Dominanza

$E1$ domina $E0$ (Blackwell) se per ogni loss e per ogni problema decisionale, il rischio minimo ottenibile con $E1$ è $\leq$ di quello con $E0$.

VI.3 Interpretazione nel nostro contesto

$E0$ = nessuna osservazione individuale (decisione costante o dipendente solo da P_Z).

$E1$ = osservazione informativa $X=z_{\text{hat}}$.

Se X contiene informazione su Z e F è non separabile, la decisione condizionata su X può ridurre rischio rispetto alla costante (in generale e in casi concreti).

SEZIONE VII — IMPOSSIBILITÀ AGGREGATIVA (FORMA MINIMAX)

VII.1 Classe di modelli non separabili

Sia C una classe di F tali che esistono z_1, z_2 con $u^*(z_1) \neq u^*(z_2)$.

VII.2 Teorema (impossibilità)

Nessuna regola aggregativa costante u_0 può essere simultaneamente ottima per tutti gli z in tali classi:

$$\sup_z \text{Reg}(z; u_0) > 0.$$

Prova (schema rigoroso):

Se $u^*(z_1) \neq u^*(z_2)$, allora per ogni u_0 almeno uno dei due regret è > 0 (per definizione di ottimo). Quindi il sup è > 0 .

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA PRIMARIA ESSENZIALE

- D. Blackwell, “Equivalent Comparisons of Experiments”, *Annals of Mathematical Statistics*, 1953.
- L. M. Bregman, “The relaxation method of finding the common point of convex sets...”, 1967.
- S. G. Krantz, H. R. Parks, “The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications”, Springer/Birkhäuser.
- (Riferimento concettuale di impossibilità aggregativa in altro dominio) K. J. Arrow, “Social Choice and Individual Values”, 1951.

APPENDICE A — IFT APPLICATO ALL'ARGMAX (PROVA INTEGRALE)

A.1 Setup

$F \in C^2$, definisci $G(z,u) = \nabla u F(z,u)$.

Assumi $G(z_0, u_0) = 0$ e $D_u G(z_0, u_0) = \nabla^2_{\{uu\}} F(z_0, u_0)$ invertibile.

A.2 Teorema (funzione implicita)

Esistono intorno $N(z_0)$, $N(u_0)$ e una funzione unica $\varphi: N(z_0) \rightarrow N(u_0)$, C^1 , tale che:

$$G(z, \varphi(z)) = 0 \quad \forall z \in N(z_0).$$

A.3 Derivata

$$D\varphi(z) = -(D_u G(z, \varphi(z)))^{-1} D_z G(z, \varphi(z)).$$

A.4 Applicazione

Ponendo $u^*(z) = \varphi(z)$ ottieni:

$$D_z u^*(z) = -(\nabla^2_{\{uu\}} F(z, u^*(z)))^{-1} \nabla^2_{\{zu\}} F(z, u^*(z)).$$

A.5 Bound di sensibilità

Se $-\nabla^2_{\{uu\}} F \geq mI$, allora $\|(\nabla^2_{\{uu\}} F)^{-1}\| \leq 1/m$ e:

$$\|D_z u^*(z)\| \leq (1/m) \|\nabla^2_{\{zu\}} F(z, u^*(z))\|.$$

Riferimento: Krantz–Parks.

APPENDICE B — REGRET: ESPANSIONE E BOUNDS (2° e 3° ORDINE)

B.1 Taylor

Come in Sezione V:

$$\text{Reg}(z;u) = -(1/2)\Delta u^T H \Delta u - (1/6)T[\Delta u, \Delta u, \Delta u] + O(\|\Delta u\|^4).$$

B.2 Bounds

Se $-H$ compreso tra mI e MI :

$$(m/2)\|\Delta u\|^2 \leq \text{Reg}(z;u) \leq (M/2)\|\Delta u\|^2 \text{ (localmente)}.$$

B.3 Interpretazione

Il termine cubico governa asimmetrie (per esempio “penalità diversa” per scostamenti in direzioni opposte), ma non altera la positività locale se la curvatura quadratica domina.

APPENDICE C — BLACKWELL: CONSEGUENZE DECISIONALI (OPERATIVE)

C.1 Esperimenti e garbling

$E1 \geq_B E0$ se $E0$ è ottenibile da $E1$ tramite “garbling” (post-processing) senza accesso a Z .

C.2 Conseguenza operativa

Osservare X informativo su Z non può peggiorare il rischio minimo (si può sempre ignorare X e replicare $E0$).

In presenza di dipendenza reale tra Z e ottimo, può migliorarlo.

APPENDICE D — CONTROESEMPI UNIVERSALI (CLASSE INFINITA)

Per qualunque distribuzione non degenera di Z , scegli una funzione $\Phi: Z \rightarrow U$ non costante e definisci:

$$F(z, u) = -\|u - \Phi(z)\|^2.$$

Allora:

$$u^*(z) = \Phi(z).$$

$$u_{\text{pop}} = \operatorname{argmax}_u E[-\|u - \Phi(Z)\|^2] = E[\Phi(Z)] \text{ (per quadratico).}$$

Se Φ non costante, $u^*(z)$ non è costante, quindi A non è completo.

Questa costruzione genera una famiglia infinita-dimensionale di controesempi.